- ```
    if NumA*A.Strength > NumB*B.Strength then
  write(A.Caption)
  ```
- ```
    else if NumA*A.Strength < NumB*B.Strength then
  write(B.Caption)
  ```
- `      else write('Nobody');`
- `  writeln('Won');`
- `end;`
-
- `begin`
- `  Lud.Caption:='Lúd';`
- `  Lud.Strength:=10;`
- `  Diszno.Caption:='Disznó';`
- `  Diszno.Strength:=540;`
- `  Attack(Lud, Diszno, 1, 1);`
- `  Attack(Lud, Diszno, 20, 1);`
- `  Attack(Lud, Diszno, 60, 1);`
- `end.`

- F9 (Run)
- Result:
  - `Disznó Won.`
  - `Disznó Won.`
  - `Lúd Won.`

A zsonglőrködés fizikája

Mottó: *Meggyőződésem, hogy a tudomány szakmákra, szakterületekre való felosztása az osztályozó emberi elme ugyan szükségszerű, de mesterséges terméke. A természet nem ismeri az ilyen szakosítást.*

Szalay Sándor-atomfizikus

A matematika csupán számokkal való *zsonglőrködés*, a fizika képletekkel való bűvészkedés, a kémia meg csak kémcsövekben való kotyvasztás.- szokták mondani. E mondás tehát magát a zsonglőrködést a matematikához köti. Ezt erősíti az alábbi [1]-ből vett feladat és annak megoldása is.

F.60. *Jani és Juliska édesapja szomorúan bandukolt haza, ugyanis nem tudott venni egyebet, mint két darab tojást. Bánatában elgondolkodott, így eltévesztve az utat, egy olyan régi fahídhoz ért, amelyre ki volt írva, hogy 70 kg-nál nagyobb tömeget nem bír el. Elgondolkozott a jó öreg:*

- Én pontosan 69,950 kg tömegű vagyok, a tojások meg egyenként 50 g tömegűek. Még ezt a két tojást sem tudom épségben hazavinni gyermekeimnek – búslakodott szomorúan.

Hamarosan azonban mentő ötlete támadt, és épen hazavitte a két tojást anélkül, hogy a híd leszakadt volna pontosan egyszer haladt át a hídon, és senki sem segített neki. Vajon hogy tette ezt?

Matematikai megközelítés

A hivatkozott folyóirat megfejtése: „Egy kis humorral, és az apuka részéről egy kis kézügyességgel, úgy jár el, mint a cirkuszban: amíg a hídon halad át, felváltva fel-fel dobja (és persze ki is fogja) az egyik tojást (*zsonglőrködik*), így a kezében mindig csak egy 50 g-os tojás van, és a 69,950 kg saját tömegével éppen 70 kg „halad át" a hídon [1, 257. oldal.]."

Az első olvasatra ötletesnek tűnő megoldás egyértelműen matematikusi gondolkodásmódra utal. Nem véletlen, hiszen a feladat egy matematikai folyóiratban jelent meg Erdélyben.

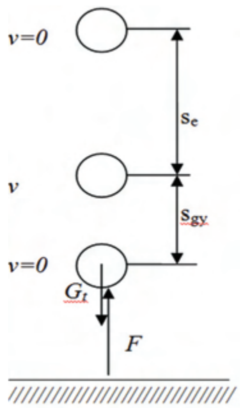
Biológiai megközelítés

Tanítványaimnak kíváncsiságból én is feladtam a fenti feladatot és érdekes módon először „biológiai" megközelítést alkalmaztak. Volt, aki azt javasolta, hogy az apa vágjon le a hajából annyit, mint a két tojás tömege, mások valamilyen ruhadarabtól – pl. kabát, stb. – akarták meg – szabadítani, vagy azt javasolták, hogy dobja át a folyón a cipőit, és mivel azok biztosan nehezebbek, mint egy tojás, így mezítláb a két tojással a híd leszakadásának veszélye nélkül könnyedén át tud menni a hídon. Bár a feladat eredeti kiírása nem tartalmaz a híd teherbíró képességénél több megkötést, de mi most próbáljuk megvizsgálni a folyóirat megfejtését úgy, hogy nem használunk semmiféle egyéb trükköt, mivel aki csak egy kicsit is tanult fizikát az egyből észreveszi, hogy itt most van *tömeg* (tojás), *gyorsító erő* (amivel a tojást feldobjuk), és ez esetben a jó öreg Newton szerint akkor kell, hogy legyen gyorsulás is. Vagyis ebben a feladatban, és – nyilván a megoldásban is – bőven van fizika, használhatjuk a fizikai gondolkodásmódot.

Fizikai megközelítés

Sajnos, Jancsi és Juliska édesapja nagyon egyoldalúan (csak „matematikusként") gondolkodott, és nem vette figyelembe a természet (jelen esetben a fizika) törvényeit, emiatt, ha a fent leírt megoldás szerint jár el, akkor a híd azonnal leszakad alatta. Miért? Ahhoz, hogy az apa a tojást függőlegesen feldobja, azt fel kell gyorsítani valamilyen sebességre. Ehhez függőleges, felfelé irányuló „tolóerőt" kell kifejtenie. Newton óta tudjuk, hogy a *hatás-ellenhatás törvénye* miatt az erők mindig párosával lépnek fel, így ugyanilyen nagyságú, de ellentétes (lefelé irányuló) erő is keletkezni fog, ami a kézre hat, így ennyivel megnövekszik az apa súlya, de mivel a híd semmilyen többletterhelést nem bír el, természetesen le fog szakadni.

Vizsgáljuk most meg, hogy mennyivel növekszik a súlyunk, miközben feldobjuk a kezünkben lévő tojást vagy bármilyen tárgyat?



1. ábra. *A tojásfeldobás fázisai*

Az 1. ábra a tojásfeldobás fázisait mutatja, ahol

F = a tojásra kifejtett „tolóerő"

G_t = a tojás/test súlya

s_{gy} = a tojás gyorsítási/lassítási úthossza (ezalatt hat rá az *F* erő)

s_e = a tojás emelkedési/esési úthossza (a gyorsítás megszűntének pozíciójától számítva)

A *szabadesés törvényei* alapján az s_e magasságból elejtett test esetén

$s_e = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (1), illetve $v = g \cdot t$ (2)

ahol t = a repülés/zuhanás ideje. A (2) egyenletből t-t kifejezve és (1)-be helyettesítve, majd az egyenletet rendezve

$2 \cdot g \cdot s_e = v^2$ (3)

A *munkatétel* alapján a gyorsítási szakaszra viszont írható, hogy a gyorsító erő (F_{gy}) munkája egyenlő a mozgási energia megváltozásával, azaz $F_{gy} \cdot s_{gy} = \frac{1}{2} m_t \cdot v^2$ (4)

(3)-at (4)-be helyettesítve, majd $F_{gy} - t$ kifejezve $F_{gy} = \frac{s_e}{s_{gy}} \cdot m_t \cdot g = \frac{s_e}{sgy} \cdot G_t$ (5), ahol $m_t \cdot g = G_t$, a feldobott test súlya.

A testet ténylegesen gyorsító erő az ún. eredő erő, a testre kifejtett felfelé mutató tolóerő (F) és a test súlya között az alábbi összefüggés áll fenn.

F_{gy} = F - G_t (6)

Ebbe (5)-öt behelyettesítve, F-re az alábbi összefüggés adódik.

F = $(1 + \frac{s_e}{sgy}) \cdot G_t$ (7)

Súlyunk tehát éppen ezzel megegyező értékkel, de az F-el ellentétes irányú, lefelé mutató ún. reakció erő nagyságával növekszik. A súlynövekedés (ΔG) tehát a feldobott test súlyának $(1 + \frac{s_e}{sgy})$ -szeresével egyenlő.

$$\Delta G = (1 + \frac{s_e}{sgy}) \cdot G_t \qquad (7)$$

Így a zsonglőrködés eddig nem publikált általános összefüggéséhez jutottunk.

Természetesen a test elkapásakor ugyanekkora lesz a súlynövekedésünk, feltéve, ha az esési illetve lassítási úthosszak megegyeznek az emelkedési illetve gyorsítási úthosszakkal.

Egy lehetséges tojásdobálási kísérletet ténylegesen elvégezve és levideózva, majd a videót visszajátszva és a távolságokat lemérve az alábbi értékek adódtak.

s_{gy} = 10 cm, s_e = 40 cm, m_t = 50g = 0,05 kg; ekkor

$G_t = m_t \cdot g$ = 0,05 ·10 = 0,5 N; ΔG = $(1 + \frac{40}{10}) \cdot 0{,}5$ = 5·0,5 = 2,5 N súlynövekedés adódik.

Így a 69,950 kg tömegű apa eredeti 69,950 ·10 = 699,5 N súlya a tojás feldobásakor 699,5+2,5 = 702 N lesz, ezt a 70·10 = 700 N teherbírású fahíd nem fogja elbírni, így mindenképpen leszakad. Sajnos a helyzet még is rosszabb. Eddig ugyanis figyelmen kívül hagytuk azt a tényt, hogy a tojás/test feldobásakor a tojásnál jóval nagyobb tömegű kezünket is gyorsítani kell, ami szintén súlynövekedést okoz. (Pontos számításnál tehát ezt is figyelembe kell venni.)

Így tehát azt gondolhatnánk, hogy most már az apának csak egyetlen lehetősége van, mégpedig az, hogy dobálás nélkül, egyenként viszi át a tojásokat a hídon, mert így a tömege a tojással együtt éppen 70 kg, ami megegyezik a híd teherbírásával. Sajnos, a fizika, megint közbeszól, ugyanis a normál járás közben – és ezt eddig nem is vettük figyelembe! – a tojás és a testünk súlypontja le-föl jár, ráadásul a nem kis tömegű lábainkat is emelgetni (gyorsítani, lassítani) kell, így súlyunk ezek miatt is megnövekszik olyan mértékben, hogy valójában tojás nélkül sem tudnánk átmenni a 70 kg teherbírású hídon.

Ez a feladat tehát egy nagyon jó példa arra, hogy a valóságban (a természetben) a jelenségek nincsenek tudományterületek szerint szétválasztva, ezt csak az emberi elme teszi azért, hogy egy bonyolultabb jelenséget több szempontból vizsgálva könnyebben megértsük. Szalay akadémikus mottóul választott szép gondolata e feladaton keresztül is igazolást nyert.

A technika és a műszaki tudományok fejlődése napjainkban a fizika mély ismeretét igényli a későbbiekben e területekre kerülő tehetséges tanulóktól, akik a fizikai ismeretanyagot kellő profizmussal tudják összekapcsolni a természet- és műszaki tudományok többi területével.

„A *zsonglőrködés* sokak számára csak bohóckodás, amolyan cirkuszi produkció: tányértáncoltatás, röpködő labdák és buzogányok, pedig története a távoli múltban kezdődött. A legősibb dokumentált emlék közel négyezer éves: egy zsonglőröket ábrázoló egyiptomi sírkamrarajz a Középső Királyság idejéből. James Cook kapitány felfedezései nyomán pedig azt a meglepő tényt jegyezték fel, hogy Tonga szigetén a leányok mindegyike tudott zsonglőrködni, esetenként hat labdával is. A matematikus számára persze a zsonglőrködés – mint sok minden a világon – izgalmas matematikai feladvány, nagyon is komoly dolog. Bármily meglepő, a ma ismert zsonglőrmutatványok egy részét matematikusok »találták fel«, nem pedig cirkuszi mutatványosok. 1972-ben a Nemzetközi Zsonglőrszövetség elnöke az a *Ronald L. Graham* volt, aki a Magyar Tudományos Akadémia Tiszteleti tagja, 1993-ban pedig az Amerikai Matematikai Társulat elnöke tisztet töltötte be [2].”

Mint [2] cikk – melynek elolvasását szintén ajánlom – is rámutat, a zsonglőrködés a matematikának is komoly vizsgálati/kutatási területe. Ugyanakkor fizikai szempontból is sok érdekeset tudtunk mondani róla, ráadásul fizikaórán egy mérlegre állva, még ha nem is zsonglőrködve – mert nem is olyan könnyű pl. három almával zsonglőrködi – de egyszerűen csak egy almát feldobva és elkapva, a fenti megállapításokat egyszerű súlyméréssel igazolhatjuk, ami igen meggyőző lehet a tanulók számára, rávilágítva arra, hogy ezt a tevékenységet még mélyebben vizsgálhatnánk, mint ahogyan a fentiekben tettük.

Zárszó

Ugyanez a modell – és a levezetett képlet is!- kiválóan használható a különböző munkavégzések – súlyemelés (pl. zsák felemelése vállra), stb. – esetén is a talajra, illetve az alátámasztásra kifejtett erő számítására, ez alapján annak méretezésére, vagy egy kéttámaszú, támaszközök között fentiek szerinti dinamikus erővel terhelt tartó méretezése során is.

Bizony még az is előfordulhat, hogy ha egy lóca közepén állva például feldobunk egy gyereket, akkor súlynövekedésünk elég nagy lehet ahhoz, hogy annak deszkája eltörjön. Tehát vigyázzunk a gyerek (pl. unoka) dobálásával! Ki hitte volna, hogy a fizikának még a biztonságos gyerekdobáláskor is hasznát lehet venni.

Ismertek olyan balesetek, hogy építkezéskor az állványzaton álló munkás valamit - téglát, beton lapot, nehezebb szerszámot, kézi gépet, stb. – feldobott a munkatársának, vagy éppen csak hírtelen megemelt – pl. vállra vett – valamit, és éppen ekkor szakadt le alatta az állványzat. Hát most már tudjuk, hogy miért, sőt ki is tudjuk számítani a súlytöbbletet.

Az így szerzett tudás alapján könnyen kigondolható *a jégen való minél biztonságosabb mozgás módja* is. Különösen, ha még nincs jól befagyva pl. egy tó felülete, és csak vékony jégpáncél borítja, akkor egy esetleges esés után nem ajánlott a hirtelen felállás, vagy a helyből való függőleges felugrás, mert talpunk alatt a nyomás akkorára növekedhet, hogy beszakad alattunk a jég.

A levezetett képlettel és a hozzáfűzött gyakorlati alkalmazási példákkal bővíteni lehetne a Fizika/Mechanika tankönyvek érintett fejezetét, mivel a hétköznapi életben nincs olyan nap, hogy ne emelnénk fel valamit/valakit, melynek során súlyunk mindig változni fog. No és persze gyakran le is guggolunk, akkor pedig éppen fordítva, súlycsökkenés következik be.

Irodalom

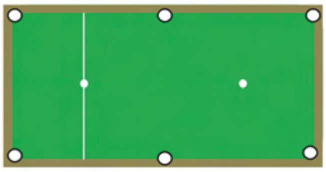
1. *Matlap* 7, Kolozsvár, 2013. szeptember, 257. o. **F. 60.** feladat
2. Dr. Czédli Gábor: *A III. Béla Gimnáziumtól az egyszerű zsonglőrminták átlagtételéig*, Szeged, 2007. január 26. http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/publ.pdf/3.Bela1.pdf

Varga János, Székesfehérvár

A biliárdgolyók fizikája

A biliárd nem más, mint a tervezés magasiskolája.
Nemcsak játék, hanem sokat ígérő sportművészet,
melyhez egy sakkjátékos elméje és egy koncertzongorista keze szükséges.
Albert Einstein

Maga a biliárd szó összefoglaló sportnév. Ezeket a játékokat egy négyszögletes asztalon, meghatározott számú golyóval és egy dákónak nevezett hosszú bottal játsszák. Ezeknek a játékoknak kb. 36 fajtáját lehet megkülönböztetni, legismertebb változatai: Karambol vagy Francia biliárd, Angol biliárd, Snooker és Pool biliárd. A Francia biliárdot lyuk nélküli asztalon játsszák, míg az Angol biliárdot az 1. ábrán látható 6 lyukkal ellátott asztalon. Az asztalt és a kipárnázott szegélyű keretet, amit oldalfalnak nevezünk, feszülő posztó borítja.



1. ábra

A hosszú és a rövid oldalak aránya minden esetben 2:1. A játéktérméretek 180x90 cm (6') és 356x178 cm (12') között a szokásosak. A biliárdgolyók anyaga régebben fa, réz, elefántcsont vagy belga anyag volt. Ma általában kb. 2 g/cm^3 sűrűségű műanyagból (fenolgyanta) készülnek és átmérőjük 5,2cm és 6,05 cm között változhat. A szabványos pool-biliárd dákó kb. 148 cm hosszú. A biliárd bármely változatában mindig két játékos játszik egymás ellen. A biliárdjáték művészei bámulatos ügyességgel ütköztetik a dákóval meglökött golyót egy nyugvóhoz úgy, hogy a golyók sokszor „karambolozzanak" illetve a kiválasztott lyukba hulljanak bele. A biliárdasztal posztója nagy súrlódási felület, ezért a golyók mozgását tiszta gördülésnek tekinthetjük, kivéve a golyóknak közvetlenül az ütközés utáni mozgását, amikor is rövid időre megcsúsznak. A kemény biliárd golyók egymással tökéletesen rugalmasan ütköznek, ezért az ütközés folyamatára alkalmazható az impulzus megmaradásának törvénye mellett a mechanikai energia megmaradásának az elve is.

Először vizsgáljuk meg két golyó centrális ütközését, amikor az ütköző golyók valamint az asztal felülete közötti súrlódás elhanyagolható. Centrális ütközéskor az ütközés a testek súlypontjait összekötő egyenes mentén történik. Legyen a két, centrálisan és tökéletesen rugalmasan ütköző golyó tömege $m_1=m_2=m$. A csak haladó mozgást végző első golyó sebessége ütközés előtt $v_1=v_o$ és a másodiké $v_2=0$ (2. ábra).