A világ legnagyobb matematikai
felfedezése a kamatos kamat.
Albert Einstein

ALAPTŐKE DUPLÁZÓDÁS SZÁMÍTÁSA FEJBEN

Varga János mérnöktanár, Székesfehérvár

A tőkeduplázódás szabálya nem csak menedzsereknek

Egy több ezer mintás felmérés szerint az átlag magyar ember egyáltalán nem ismeri azt a rendkívül egyszerű, könnyen megtanulható és alkalmazható szabályt, amellyel akár fejben is azonnal ki lehet számolni, hogy adott kamatlábbal bankban elhelyezett tőke (vagy adott hozamú befektetett összeg) hány év alatt duplázódik meg. Illetve fordítva, adott időtartamig lekötött összeg esetén mennyinek kellene lennie a kamatlábnak, hogy a befektetett/lekötött tőke megduplázódjon.

Ennek meghatározására szolgál az úgynevezett 72-*es szabály*, miszerint:

$$\textit{lekötés időtartama évben } (i) \times \textit{kamatláb } (k) = 72 \qquad (1)$$

Bármennyire hihetetlen, de ennyi az egész. A fenti összefüggés a gyakorlati életben ma használatos banki kamatok, illetve megvalósítható befektetési hozamok tartományában igen nagy pontosságú eredményt ad.

Lássunk néhány példát teljesen valós adatokkal.

1. *Százezer forintot* 6%*-os nettó kamat esetén hány évre kell lekötni egy bankban, hogy a futamidő végén kétszázezer forintunk legyen*?

Az (1) összefüggés alapján $i \cdot 6 = 72$, ahonnan azonnal kapjuk, hogy a lekötés időtartama $72 : 6 = 12$ év.

2. *Kilenc éves befektetés esetén mennyi legyen az éves nettó hozam (kamat), ha befektetésünket meg akarjuk duplázni*?

Az (1) összefüggés alapján $9 \cdot k = 72$, innen a lekötés hozama $72 : 9 = 8\%$.

A 72-es szabály elméleti háttere

A kereskedelmi aritmetikai feladatok között az egyik leggyakoribb a *kamatos kamat* számítása. Ezek egyike-másika transzcendens egyenletekre vezet. Például annak a kérdésnek a megválaszolásához, hogy hány év alatt kettőződik (duplázódik) meg az alaptőke kamatos kamat esetén, az $\left(1+\frac{k}{100}\right)^i = 2$ (2) egyenlet megoldását kell ismerni, ahol k az éves kamat, i az alaptőke duplázódásához szükséges évek száma.

A (2) egyenlet mindkét oldalát logaritmálva, majd rendezve

$$i = \frac{\lg 2}{\lg\left(1+\frac{k}{100}\right)} \Rightarrow i \approx \frac{69}{k}. \qquad (3)$$

Az [1] irodalom alapján $i \approx \frac{69}{k}$, ahonnan $i \cdot k \approx 69$ és nem 72, amint azt Pacioli írja.

Kinek van igaza, Juskevicsnek vagy Paciolinak?

A következő Excelben készült táblázat alapján egyértelmű, hogy az (1) szerinti összefüggés az $5\% - 10\%$-os tartományban nagy közelítéssel érvényes. Ez éppen az a kamat tartomány, ami a hétköznapi életben a leggyakrabban fordul elő.

	A	B	C	D	E
1	kamat %	év	év × kamat %	év kerekítve	év × kamat% kerekítve
2	1	69, 66	69, 66	70	70
3	2	35, 00	70, 01	35	70
4	3	23, 45	70, 35	23	70
5	4	17, 67	70, 69	18	71
6	5	14, 21	71, 03	14	71
7	6	11, 90	71, 37	12	71
8	7	10, 24	71, 71	10	72
9	8	9, 01	72, 05	9	72
10	9	8, 04	72, 39	8	72
11	10	7, 27	72, 73	7	73
12	11	6, 64	73, 06	7	73
13	12	6, 12	73, 40	6	73
14	100	1, 00	100, 00	1	100
15	*Az első sor képletei:*	=LOG(2)/LOG(1+A2/100)	=A2*B2	=KEREKÍTÉS (B2;0)	=KEREKÍTÉS (C2;0)

Az év × kamatláb szorzatra a 72 jobb közelítés, mint a 69, tehát mégis csak Paciolinak volt igaza. Ezt egy grafikus programmal – pl. winplot – is nagyon jól lehet szemléltetni, egy koordináta-rendszerbe felrajzolva a (3) szerinti pontos logaritmikus összefüggést, valamint a $\frac{69}{k}$ és $\frac{72}{k}$ közelítő hiperbolákat. Az alaptőke duplázódás számítására a táblázat alapján az alábbi összefüggés a gyakorlatban is jól használható, ráadásul a számítás fejben is elvégezhető.

$$\text{Futamidő } (i) \times \text{kamatláb } (k) \approx 72$$
$$i \cdot k \approx 72$$

A 72-es szabályhoz még két megjegyzést tehetünk:

1. Ha k értéke 100%-hoz közeledik, akkor (3) alapján $i = 1$, vagyis az $i \cdot k$ szorzat is a 100-hoz tart.

2. A futamidő és a kamatszázalék nagy pontossággal, egymással fordított arányosságban van.

Ezt a képletet – esetleg rövid levezetésével együtt – minden középiskolás matematika tankönyv kamatos kamat számítását tárgyaló fejezetének tartalmazni kellene. Ugyanakkor a logaritmus számítás gyakorlati hasznosságára is jó példa.

Csak érdekességképpen jegyzem meg, hogy ezt a képletet – pl. ártárgyalásokon való gyors és egyszerű alkalmazhatósága miatt – az amerikai menedzser kézikönyvek mindegyike tartalmazza, mivel a befektetett/lekötött tőke duplázódási ideje segítségével fejben azonnal kiszámítható.

A 72-es szám egyéb előfordulásai

1. Egy átlagos növésű felnőtt ember által belátható Földterület nagysága éppen 72 km^2.

A látóhatár távolsága [2] szerint $L = \sqrt{2Rh}$. Figyelembe véve az atmoszférikus refrakciót (légköri fénytörés) $L = 1,06\sqrt{2Rh}$, a Föld sugara $R = 6370$ km, a szemmagasság h (km).

Ha a szemmagasságot cm-ben helyettesítjük be, akkor $L = 0,38 \cdot \sqrt{h}$ (km).

Például egy 160 cm szemmagasságú ember látóhatára: $L \approx 4,8$ km.

A belátható Földterület nagysága $T = L^2 \cdot \pi = 4,8^2 \cdot 3,14 \approx 72$ (km^2).

2. Az átlagos emberi pulzusszám 72.

3. A szabályos ötszög oldalaihoz tartozó középponti szög 72°.

4. Magyarok által felfedezett egyik elem a Hafnium($_{72}Hf$) rendszáma szintén 72. Hevesy György későbbi Nobel-díjas kémikus fedezte fel, az elem a nevét Koppenhága latin nevéről kapta.

Paciolirόl röviden [3]

Jacopo De Barbari: Luca Pacioli portréja (mögötte Albrecht Dürer látható)

Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (névváltozat Paciolo) (1445-1514) olasz matematikus és ferences szerzetes. A szülőhelye (Borgo San Sepolcro, Toszkána) után nevezték Luca di Borgo-nak is.

Velencében és Rómában tanult, az 1470-es években lépett be a ferences rendbe, 1497-ig utazó matematika tanár volt, majd elfogadta Lodovico Sforza herceg meghívását, hogy Milánóban dolgozzon. Itt együttműködött Leonardo da Vincivel.

Paciolinak több matematikai műve jelent meg: *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* (Velence 1494); *Geometria* (1509), Euklidész latin fordítása; *Divina proportione* (Velence 1509).

A *Summa de arithmetica ...* tartalmazza az első leírást a velencei könyvvezetési módszerről, amely később *kettős könyvelés* néven vált ismertté. Emiatt Luca Pacioli a *könyvelés atyja*ként ismert.

Leonardo da Vinci készítette az ábrákat a *Divina proportione*-hez, abban az időben, amikor matematika leckéket vett Paciolitól. A mű az aranymetszés szabályait tárgyalja, illetve ennek felhasználását az építészetben. A mű ezen kívül tárgyalja a perspektíva használatát a festészetben.

Szakirodalom:

[1.] *A. P. Juskevics*: A középkori matematika története, 446. o. (Gondolat, Bp., 1982. 474 p)

[2.] *J. I. Perelman*: Szórakoztató geometria, Művelt nép Könyvkiadó, Budapest, 1953, 154. o.

[3.] Wikipédia: Luca Pacioli