EXPONENCIÁLIS HATVÁNYFÜGGVÉNY egyszerű deriválása logaritmikus differenciálás nélkül

VARGA JÁNOS

Mottók: - *Aki tanít, az kétszeresen tanul.*
- *Egy a valóság, ezer a ruhája.*

Bevezetés

A logaritmikus differenciálás módszerét akkor alkalmazzuk, ha a differenciálandó függvény hatvány alakú és mind az alap, mind a kitevő *x* függvénye. Ezt a függvényt *exponenciális hatványfüggvénynek* nevezzük [1/102].

Az $y= f(x)^{g(x)}$ típusú exponenciális hatványfüggvény deriválásakor a differenciálszámítással ismerkedők gyakran az alábbi hibákat követik el:

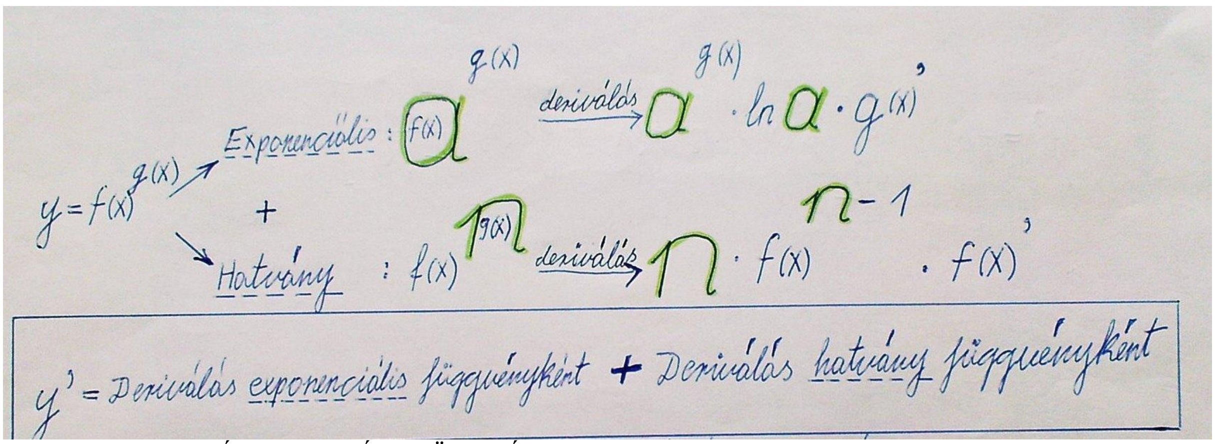
- a fenti függvényt $\mathbf{a}^{g(x)}$ *exponenciális függvényként* közvetlenül deriválják, ahol az f(x) alapot konstansnak tekintik
- a fenti függvényt $f(x)^{\mathbf{n}}$ *hatványfüggvényként* deriválják, miközben a g(x) kitevőt tekintik konstansnak

Nagy titkot árulok el! **Kövesd el mindkét hibát, add össze a hibás eredményeket, és ha hiszed, ha nem, helyes eredményt fogsz kapni. Ez bizonyíthatóan igaz.**

Az *exponenciális hatványfüggvény* differenciálásának/deriválásának új, egyszerű módszere és lépései tehát a következők:

1. *Deriváljuk* le a függvényt *exponenciális függvényként* úgy, hogy az **f(x)** alapot konstansnak tekintjük.
2. *Deriváljuk* le ismét a függvényt *hatványfüggvényként* úgy, hogy deriválás közben most meg a **g(x)** kitevőt tekintjük konstansnak.
3. A *két deriválás eredményét adjuk össze*, és ha lehetséges, akkor a kapott kifejezést hozzuk egyszerűbb alakra.

Vizuálisabban ez az alábbi ábrával szemléltethető.



Bizonyítható, hogy így ugyanazt a végeredményt kapjuk, mintha a függvényt a bonyolultabb logaritmikus differenciálással, vagy egyéb nyakatekert módon deriváltuk volna.
Ennek a módszernek előnye, hogy

- gyakorlatilag *nem igényli újabb szabály ismeretét*/megtanulását, hanem a már meglévő tudásra épít
- *nagyon könnyű megjegyezni* (memorizálni), mert szinte érzi az ember, hogy mivel a deriválandó függvény az *exponenciális* és a *hatvány* függvény tulajdonságait egyaránt magán viseli, ennek a deriválás módjában is meg kell nyilvánulnia
- *gyorsabb*, mert kevesebb lépésből áll, és emiatt
- kisebb a tévedés lehetősége
- könnyebb tanítani
- *könnyebb megtanulni*
- kevesebb szerkesztési munkát igényel pl. előadás PPT-k, példatárak, honlapok szerkesztésénél

Didaktikai okokból célszerű lenne az egyetemi/főiskolai tankönyvek legközelebbi kiadásában ezt a deriválási módszert (is) szerepeltetni exponenciális hatványfügg-vények differenciálására.

Nézzünk néhány példát:

1. $y = x^x$; $y' = ?$

I. *Megoldás*: deriválás hagyományosan, azaz *logaritmikus differenciálás*sal

$y = x^x$ (1); vegyük mindkét oldal ***e*** alapú logaritmusát, így kapjuk, hogy

$\ln y = x \cdot \ln x$; mindkét oldalt deriváljuk x szerint (a baloldalt összetett függvényként, a jobboldalt pedig szorzatként):

$\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$; y'-t explicit alakra hozzuk

$y' = y(\ln x + 1)$; y helyére az eredeti (1) függvényt helyettesítve kapjuk a végeredményt:

$y' = \underline{x^x (\ln x + 1)}$.

Hát bizony ez egy kicsit el van bonyolítva.

A *logaritmikus differenciálás* hátrányai:

- végrehajtása egy több lépésből álló eljárás megjegyzését kívánja meg
- a több lépés során nagyobb a tévesztés valószínűsége
- túl sok tudást - logaritmizálás, összetett függvény deriválása, egyenletmegoldás- igényel
- tanulása több gyakorlást igényel
- könnyű elfelejteni a sok lépés miatt

Nézzük egyszerűbben!

II. *<u>Megoldás</u>*: deriválás a fentiek szerint ismertetett „*Varga-módszerrel*”

1. **<u>e</u>**xponenciális függvényként deriválva: $y_e' = x^x \cdot \ln x \cdot 1$
2. **<u>h</u>**atványfüggvényként deriválva: $y_h' = x\, x^{x-1} \cdot 1 = x^x$
3. A két derivált összege: $y' = y_h' + y_e' = \underline{x^x\,(1+\ln x)}.$

Ennyi az egész! Látható, hogy a két eredmény megegyezik.

2. $y = x^{\cos x}$; $y' = ?$

$y' = x^{\cos x} \ln x \cdot (-\sin x)$[*exponenciális függvény* szerinti derivált] +

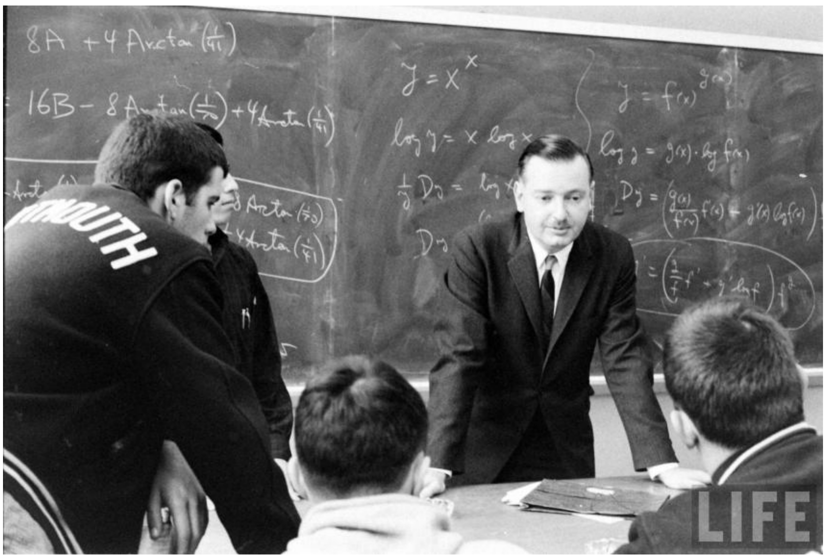
$+ \cos x \cdot x^{\cos x - 1} \cdot 1$[*hatványfüggvény* szerinti derivált] =

$= x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right]$

☺*Lehet, hogy ez a deriválási módszer is a „**KÖNYV**”-be való*?

(**Erdős Pál** matematikus szerint: "*Istennek van egy könyve, amelyben minden tétel és a legjobb* - legegyszerűbb, legötletesebb, legrövidebb – *bizonyítások /eljárások benne vannak. Ha nem is hiszel Istenben, a Könyvben hinned kell! Talán az Isten maga a Könyv.*" – hirdette, és ő maga is mindig keresett egyszerűbb bizonyításokat, eljárásokat, ha valamit túl bonyolultnak tartott.)

Matematikatörténeti érdekesség kedvéért érdemes megemlíteni, hogy Kemény János (John G. Kemeny) matematika professzor, a BASIC programozási nyelv és az *idő-osztásos operációs rendszer* feltalálója az amerikai <u>Dartmouth College</u>-ban is, a *logaritmikus differenciálás* módszerével deriválta az exponenciális hatványfügg-vényt, amit az, az előadásán készült alábbi fényképen is látható.



Akit a módszer bizonyítása is érdekel, az írjon a szerzőnek erre a címre: vargaj@freemail.hu.

Irodalom

1. *Bárczy Barnabás*: **DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS**, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 280 p.
2. *Dr. Szelezsén János*: **Matematika példatár**, INOK Kiadó, 2007,303 o.