A BERNOULLI-EGYENLŐTLENSÉG EGYSZERŰ BIZONYÍTÁSA

Mottó: A matematikában azonban a szépség elválaszthatatlan
a célszerűségtől, általában nem nevezünk szépnek
egy olyan bizonyítást, amely a célt nem a
legrövidebb, legcélravezetőbb úton éri el.
N. G. Csebotarjev

Varga János mérnöktanár, Székesfehérvár

A Bernoulli-egyenlőtlenséget Jacob Bernoulli svájci matematikus állította fel. Ez az egyenlőtlenség a matematika egyik legfontosabb tétele, számos összefüggés bizonyításában szerepel segédtételként. Az egyenlőtlenség az alábbi alakú:

$$\mathbf{(1+x)^n \geq 1+nx} \qquad \mathbf{(1)}$$

ahol $1+x > 0$, azaz $\mathbf{x > -1}$ valós szám, és $\boldsymbol{n}$ tetszőleges *pozitív egész szám* ($n \in \mathbf{N}^+$)
Egyenlőséget akkor kapunk, ha $n=1$ és/vagy $x=0$.

Egy egyszerű bizonyítás

A bizonyítás előnye, hogy nem igényel komoly matematikai ismereteket, elegendő csupán a *mértani sorozat összegképleté*nek ismerete, ami viszont középszintű érettségin is követelmény. Vegyük az $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$, … $a_n=1$ *n* elemű sorozatot.

Ezt tekinthetjük olyan számtani sorozatnak, melynél a különbség $d=0$, vagy olyan mértani sorozatnak is, amelynél a hányados $q=1$. A sorozat első *n* elemének összege mindkét esetben *n*. Ha azonban a mértani sorozatnak tekintett fenti sorozat esetén a hányados értékét $x \geq o$ értékkel megnöveljük, akkor $q = 1+x \geq 1$ lesz. A mértani sorozat mindegyik eleme, így a sorozat összege is növekedni fog, tehát a mértani sorozat első *n* tagjának összegére vonatkozó képlet alapján $\frac{\mathbf{(1+x)^n-1}}{\mathbf{(1+x)-1}} \geq \mathbf{n}$, amelyből rendezés után éppen a Bernoulli-egyenlőtlenség adódik.

Ha $-1<x<0$, akkor $0 < q=1+x < 1$, vagyis a mértani sorozat csökkenő, így a fentiekkel megegyező gondolatmenet alapján írhatjuk, hogy $\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)-1} \leq n$, amelyből rendezés után ismét az (1) egyenlőtlenség adódik.
A Bernoulli-egyenlőtlenséget ezzel minden megengedett x-re bebizonyítottuk.

Utószó

A székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium matematika szakköre ápolja Lázár Dezső, a holokauszt áldozataként fiatalon elhunyt tehetséges matematikus emlékét. Az 1994. április 18-i emlékünnepség meghívott előadója, és egyben a Lázár-díj átadója ERDŐS PÁL világhírű matematikus volt. Az előadás utáni kötetlen beszélgetés kapcsán mutattam meg Erdősnek ezt a rendkívül rövid és egyszerű bizonyítást, mire ő csak ennyit válaszolt: Ötletes, a könyvbe való. Én akkor arra gondoltam, hogy a tankönyvekben való megjelenésére céloz. Nemrég tudtam meg, hogy Erdős Pál szerint "*Istennek van egy Könyve, amelyben minden tétel és a legjobb bizonyítások benne vannak. Ha nem is hiszel Istenben, a Könyvben hinned kell! Talán az Isten maga a Könyv.* - hirdette. *Egy matematikus csak akkor lehet nyugodt, ha egy problémának nem csak egy bizonyítását, hanem a Könyvből származó bizonyítását találja meg*.”
Ezek után döntöttem úgy, hogy publikálom ezt a bizonyítást.

Erdős maga is sokat foglalkozott a KÖNYVbe való bizonyítások keresésével, még akkor is, ha mások a problémát esetleg már rég megoldották, csak kevésbé szépen.

Szakirodalom

1. *Urbán János*: Határérték számítás, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1994, 15. o.
2. *Dr. Gáspár Gyula*: Műszaki matematika I., Tankönyvkiadó, 1968
3. *Reiman István*: MATEMATIKA, Műszaki Könyvkiadó, 1992
4. *Pintér Lajos*: Analízis I., 5. kiadás, 73. o.
5. *Árokszállási László*: Bernoulli-egyenlőtlenség, A Matematika tanítása, 2007 november, 27. o.

A cikk megjelenésének helye:
Matlap 2
Ifjúsági matematikai lapok, XVIII. évfolyam, 2014, február
Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság
Kolozsvár