

EXPONENCIÁLIS HATVÁNYFÜGGVÉNY egyszerű deriválása logaritmikus differenciálás nélkül

VARGA JÁNOS

Mottók: - Aki tanít, az kétszeresen tanul.
- Egy a valóság, ezer a ruhája.

Bevezetés

A logaritmikus differenciálás módszerét akkor alkalmazzuk, ha a differenciálandó függvény hatvány alakú és mind az alap, mind a kitevő x függvénye. Ezt a függvényt *exponenciális hatványfüggvénynek* nevezzük [1/102].

Az $y = f(x)^{g(x)}$ típusú exponenciális hatványfüggvény deriválásakor a differenciálszámítással ismerkedők gyakran az alábbi hibákat követik el:

- a fenti függvényt $a^{g(x)}$ *exponenciális függvényként* közvetlenül deriválják, ahol az $f(x)$ alapot konstansnak tekintik
- a fenti függvényt $f(x)^n$ *hatványfüggvényként* deriválják, miközben a $g(x)$ kitevőt tekintik konstansnak

Nagy titkot árulok el! **Kövessd el mindkét „hibát”, add össze a hibás eredményeket, és ha hiszed, ha nem, helyes eredményt fogsz kapni. Ez bizonyíthatóan igaz.**

Az exponenciális hatványfüggvény differenciálásának/deriválásának új, egyszerű módszere és lépései tehát a következők:

1. *Deriváljuk* a függvényt *exponenciális függvényként* úgy, hogy az $f(x)$ alapot konstansnak tekintjük.
2. *Deriváljuk* ismét a függvényt *hatványfüggvényként* úgy, hogy deriválás közben most meg a $g(x)$ kitevőt tekintjük konstansnak.
3. A két deriválás eredményét adjuk össze, és ha lehetséges, akkor a kapott kifejezést hozzuk egyszerűbb alakra.

Vizuálisabban ez az alábbi ábrával szemléltethető.

The diagram illustrates the derivation of the derivative of $y = f(x)^{g(x)}$ using two methods:

- Exponenciális:** $a^{g(x)}$ is derived as $a \cdot \ln a \cdot g(x)'$.
- Hatvány:** $f(x)^n$ is derived as $n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$.

The final result is summarized as: $y' = \text{Deriválás exponenciális függvényként} + \text{Deriválás hatvány függvényként}$

Bizonyítható, hogy így ugyanazt a végeredményt kapjuk, mintha a függvényt a **bonyolultabb logaritmikus differenciálás**sal, vagy egyéb nyakatekert módon deriváltuk volna.

Ennek a módszernek előnye, hogy

- gyakorlatilag *nem igényli újabb szabály ismeretét/megtanulását*, hanem a már meglévő tudást, az elemi függvények (exponenciális és hatvány) deriválási szabályait használja
- *nagyon könnyű megjegyezni* (memorizálni), mert szinte érzi az ember, hogy mivel a deriválandó függvény az *exponenciális* és a *hatvány* függvény tulajdonságait egyaránt magán viseli, ennek a deriválás módjában is meg kell nyilvánulnia
- *gyorsabb*, mert kevesebb lépésből áll, és emiatt
- kisebb a tévedés lehetősége
- könnyebb tanítani
- *könnyebb megtanulni*
- kevesebb szerkesztési munkát igényel pl. előadás PPT-k, példatárak, honlapok szerkesztésénél

Didaktikai okokból célszerű lenne az egyetemi/főiskolai tankönyvek legközelebbi kiadásában ezt a deriválási módszert (is) szerepeltetni exponenciális hatványfüggvények differenciálására.

Nézzünk néhány példát:

1. $y = x^x$; $y' = ?$

I. *Megoldás*: deriválás hagyományosan, azaz *logaritmikus differenciálással*
 $y = x^x$ (1); **vegyük** mindkét oldal e alapú **logaritmusát**, így kapjuk, hogy
 $\ln y = x \cdot \ln x$; mindkét oldalt **deriváljuk** x szerint (a baloldalt **összetett függvényként**, a jobboldalt pedig **szorzatként**):

$$\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1; \quad \text{y'-t explicit alakra hozzuk}$$

$y' = y(\ln x + 1)$; **y helyére az eredeti (1) függvényt helyettesítve** kapjuk a végeredményt:

$$y' = \underline{x^x (\ln x + 1)}.$$

Hát bizony ez egy kicsit el van bonyolítva.

A logaritmikus differenciálás hátrányai:

- **végrehajtása egy több lépésből álló eljárás megjegyzését kívánja meg**
- **a több lépés során nagyobb a tévesztés valószínűsége**
- **túl sok tudást - logaritmizálás, összetett függvény deriválása, egyenletmegoldás- igényel**
- **tanulása több gyakorlást igényel**
- **könnyű elfelejteni a sok lépés miatt**

Nézzük egyszerűbben!

II. Megoldás: deriválás a fentiek szerint ismertett „Varga-módszerrel”

1. exponenciális függvényként deriválva: $y_e' = x^x \cdot \ln x \cdot 1$

2. hatványfüggvényként deriválva: $y_h' = x \cdot x^{x-1} \cdot 1 = x^x$

3. A két derivált összege: $y' = y_h' + y_e' = \underline{x^x (1 + \ln x)}$.

Ennyi az egész! Látható, hogy a két eredmény megegyezik.

2. $y = x^{\cos x}$; $y' = ?$

$$\begin{aligned} y' &= x^{\cos x} \ln x \cdot (-\sin x) [\text{exponenciális függvény szerinti derivált}] + \\ &\quad + \cos x \cdot x^{\cos x - 1} \cdot 1 [\text{hatványfüggvény szerinti derivált}] = \\ &= x^{\cos x} \left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right] \end{aligned}$$

☺ *Lehet, hogy ez a deriválási módszer is a „KÖNYV”-be való?*

(**Erdős Pál** matematikus szerint: "Istennek van egy könyve, amelyben minden tétel és a legjobb - legegyszerűbb, legötletesebb, legrövidebb – bizonyítások /eljárások benne vannak. Ha nem is hiszel Istenben, a Könyvben hinned kell! Talán az Isten maga a Könyv." – hirdette, és ő maga is mindig keresett egyszerűbb bizonyításokat, eljárásokat, ha valamit túl bonyolultnak tartott.)

Matematikatörténeti érdekesség kedvéért érdemes megemlíteni, hogy **Kemény János** (John G. Kemeny) matematika professzor, a **BASIC** programozási nyelv és az **időosztásos operációs rendszer** feltalálója az amerikai **Dartmouth College**-ban is, a **logaritmikus differenciálás** módszerével deriválta az exponenciális hatványfüggvényt, amit az, az előadásán készült alábbi fényképen is látható.



Akit **a módszer bizonyítása** is érdekel, az írjon a szerzőnek erre a címre: vargaj.szfv@gmail.com

Irodalom

- 1. Bárczy Barnabás: DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS**, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977, 280 p.
- 2. Dr. Szelezsén János: Matematika példatár**, INOK Kiadó, 2007, 303 o.